ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε το $\bar{x}$ ονομάζεται σημείο συσσώρευσης του U, αν $(\forall \varepsilon > 0)$

$$U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset \quad (\sigma.\sigma.)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε το $\bar{x}$ ονομάζεται σημείο επαφής του U, αν $(\forall \varepsilon > 0)$

$$U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \neq \emptyset \quad (\sigma.\varepsilon.)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε το $\bar{x}$ ονομάζεται μεμονωμένο σημείο του U, αν $(\exists \varepsilon > 0)$

$$U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) = \{\bar{x}\} \quad (\mu.\sigma.)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Η ένωση μιας (οσοδήποτε μεγάλης, πιθανόν υπεραριθμήσιμης) οικογένειας ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ και η τομή μιας πεπερασμένης οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτά.

Παρατήρηση: Η τομή μιας άπειρα αριθμήσιμης οικογένειας ανοικτών, δεν είναι απαραίτητα ανοικτή π.χ. στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ [δηλ. στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x,y)=|x-y|$ που επάγεται από τη νόρμα $|\cdot|$]. Τα σύνολα $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ $n\in\mathbb{N}$ είναι ανοικτά ενώ η τομή τους
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$$ είναι κλειστό.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η τομή μιας οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και η πεπερασμένη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

Σχετικά με την κλειστή θήκη $\bar{U}$ ενός $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$. Τότε:

1) $U\subset\bar{U}$
2) $\bar{U}$ είναι κλειστό
3) $U=\bar{U} \Leftrightarrow U$ είναι κλειστό (αλλά και $U=\mathring{U}\Leftrightarrow U$ ανοικτό)
4) $\bar{x}\in\bar{U} \Leftrightarrow \bar{x}\in U$ ή $\bar{x}$ σ.σ. του U [$\Leftrightarrow \bar{x}$ σ.ε του U].

Απόδειξη

1) Έστω $\bar{x}\in U \Rightarrow (\bar{x}\in V)(\forall V\in\mathbb{R}^n)$ με $V\supset U\Rightarrow$
$\Rightarrow(\bar{x}\in V)(\forall$ κλειστό $V)$ με $V\supset U\Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{x}\in\bigcap\{V\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό $V\supset U\}=\bar{U}$
2) Αφού η τομή οποσοδήποτε πολλών κλειστών είναι κλειστή
3) $\{\Rightarrow\}$ το $U=\bar{U}\Rightarrow U$ κλειστό από το (2)

$\{\Leftarrow\}$: Εστω U κλειστο και $u \in \overline{U}$ (γενικα ισχυει)
Αφου το U ειναι κλειστο και περιεχει το U
εχουμε $U \in \{V \subset \mathbb{R}^n : V \text{ κλειστο}, V \supset U\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcap \{V \subset \mathbb{R}^n : V \text{ κλειστο}, V \supset U\} \subset U \Rightarrow \overline{U} \subset U$
αρα $U = \overline{U}$.

4) $\{\Rightarrow\}$: Αν $\bar{x} \in U$ δεν εχουμε να δειξουμε κατι
Αν $\bar{x} \in \overline{U} \setminus U$ δεν είναι σσ, τοτε $(\exists \varepsilon > 0) : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset$
δηλ. $U \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$. Αλλά το $\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$
είναι κλειστό και περιέχει το U. Αρα, απο ορισμο
κλειστης θήκης εχουμε $\overline{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$ δηλ.
ειδικοτερα $\bar{x} \notin \overline{U}$ άτοπο.

$\{\Leftarrow\}$ Αν $\bar{x} \in U \Rightarrow \bar{x} \in \overline{U}$. Αν $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ είναι σσ. U
τότε $\bar{x} \in \overline{U}$, γιατί αν είχαμε $\bar{x} \notin \overline{U}$
δηλ. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$ ανοικτο απο το (Β) αρα
$(\exists \varepsilon > 0) : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n / \overline{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U$, ή ισοδύναμα
$B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset$, που σημαίνει οτι το $\bar{x}$
δεν ειναι σσ του U, ατοπο.

Ασκηση
ΝΔΟ $\forall U \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε $\partial U = \overline{U} / U^\circ$

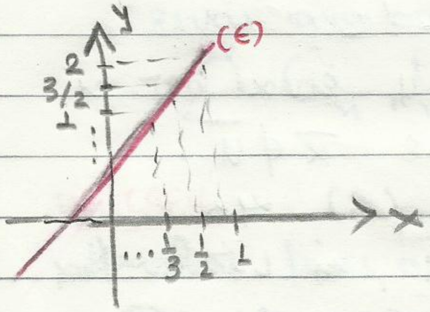
§ 1.4 Ακολουθιες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμος: Ακολουθια στον $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ μια απεικονιση απο το συνολο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}^n$ δηλαδη $\forall \nu \in \mathbb{N}: \nu \longmapsto \bar{a}_\nu \in \mathbb{R}^n$
Συμβολιζεται με $(\bar{a}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ με $\bar{a}_\nu \in \mathbb{R}^n$

πχ

$$\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}+1\right) \in \mathbb{R}^2, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

με $x_\nu = \frac{1}{\nu}$ και $y_\nu = \frac{1}{\nu}+1$
Θα ειναι στο σχημα:



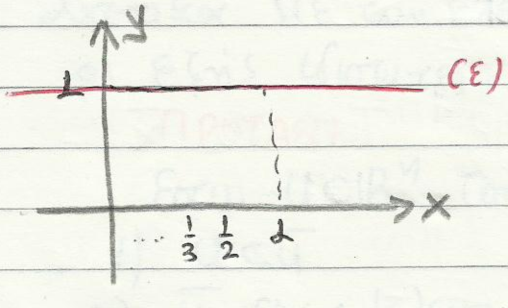
ΔΗΛΑΔΗ $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}+1\right) \in \{(x, x+1) \in \mathbb{R}^2\}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

"γραφημα"

πχ

$$\left(\frac{1}{\nu}, 1\right) \in \mathbb{R}^2, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

με $x_\nu = \frac{1}{\nu}$ και $y_\nu = 1$



ΔΗΛΑΔΗ $\left(\frac{1}{\nu}, 1\right) \in \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2\}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

"γραφημα"

Ορισμος: Μια ακολουθια $(\bar{a}_\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$ συγκλινει στο $\bar{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ (ή εχει οριο το a_0) εαν

$$\underbrace{\|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\|}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$